

La couleur des nombres

On souhaite colorier les nombres rationnels strictement positifs avec deux couleurs : en rouge ou en bleu. Chaque nombre ne peut être colorié qu'une fois.

On donne les règles suivantes :

- le nombre 1 est colorié en rouge ;
- les nombres x et $2x$ ont toujours des couleurs identiques ;
- les nombres x et $x + 1$ ont toujours des couleurs différentes.

On admet qu'avec ces règles, tout nombre rationnel strictement positif a un unique coloriage.

1. Quelle est la couleur de 2016 ?
2. Soit x un nombre rationnel strictement positif.
Que peut-on dire de la couleur de $x + n$ où n est un entier naturel ?
3. Quelle est la couleur de $\frac{1}{2}$? Quelle est la couleur de $\frac{1}{3}$?
4. a) La règle « la somme de deux nombres rouges est un nombre bleu » est-elle vraie ?
b) La règle « la somme de deux nombres bleus est un nombre rouge » est-elle vraie ?
5. A l'aide de l'égalité (admise) $\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{6}$, déterminer rapidement la couleur de $\frac{1}{6}$.
6. On donne l'algorithme suivant :

```
Début
| Lire  $a$ 
| Lire  $b$ 
|  $c \leftarrow 0$ 
| Tant que  $b \neq 0$  faire
   $q \leftarrow$  quotient dans la division euclidienne de  $a$  par  $b$ 
   $c \leftarrow c + q$ 
   $r \leftarrow$  reste dans la division euclidienne de  $a$  par  $b$ 
   $a \leftarrow b$ 
   $b \leftarrow r$ 
Fin tant que
Si  $c$  est pair alors
  Afficher « fraction Bleue »
Sinon
  Afficher « fraction Rouge »
Fin Si
Fin
```

- Appliquer cet algorithme à la fraction $\frac{1}{6}$ et expliquer pourquoi il renvoie la couleur de cette fraction.
7. Quelle est la couleur de $\frac{1}{6}$?