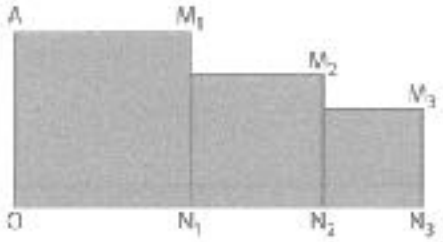
Le flocon de von Koch

I. Préliminaires

Dans toute cette partie, q est un nombre réel appartenant à]0 ; 1[.
On considère la figure ci-dessous formée de trois carrés :



Le premier carré a pour côté 1. Le deuxième carré est une réduction du premier carré de coefficient q et le troisième carré
est une réduction du deuxième carré de coefficient q également.
Ainsi, le deuxième carré a pour côté q et le troisième carré a pour côté q^2.
On se place dans le repère (O ; ;ON1 , ;OA).

1. Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 appartiennent à une même droite qu'on appellera Δ.
On poursuit la construction en construisant un quatrième carré qui est une réduction de coefficient q du troisième,
et ainsi de suite jusqu'à un $n^{\text{ième}}$ carré.
On a alors construit deux suites de points $M_1, M_2, \dots, M_n$ et $N_1, N_2, \dots, N_n$.

2. Montrer que le point M_4 appartient à la droite Δ.
On pourrait montrer de la même façon que tous les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ appartiennent à Δ.

3. Déterminer une équation de Δ.

4. En déduire les coordonnées du point d'intersection I des droites Δ et (ON_1).

5. De quel point semble se rapprocher la suite des points N_n si on répète indéfiniment la construction ?
Vers quoi tend la somme $1+ q + q^2 +\cdots+ q^{n-1}$ quand n tend vers l'infini ?

II. Le flocon de von Koch

En 1904, Helge von Koch (mathématicien suédois, 1870-1924) expose à la communauté scientifique une courbe fermée, sans point double (c'est-à-dire qui ne se coupe pas), bornée (c'est-à-dire contenue dans un cercle), admettant une aire finie et un périmètre infini !
L'objectif de cette partie est d'étudier la construction de cette courbe, appelée flocon de von Koch, et de calculer l'aire
de la surface délimitée par la courbe.

A. Construction du flocon

On considère un triangle équilatéral dont les côtés mesurent une unité. On divise chaque côté en trois parties égales,
puis on retire la partie centrale et on construit un triangle équilatéral à la place (en se développant à l'extérieur du triangle). On recommence ensuite l'opération avec les triangles équilatéraux obtenus à l'étape précédente :

Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

On notera a_n l'aire de la figure obtenue à l'étape n.

1. Étape 1 : on considère le triangle équilatéral de côté 1 (figure 1). Calculer a_1.

2. Étape 2 : on applique le partage des trois côtés du triangle et on remplace à chaque fois la partie centrale par un triangle équilatéral (figure 2). Calculer a_2.

3. Étape 3 : on recommence l'opération précédente (figure 3). Calculer a_3.

B. Aire du flocon

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = a_n +$ x

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = + \times$.

3. Montrer que, quand le nombre n d'étapes de construction tend vers l'infini, l'aire du flocon de von Koch tend vers