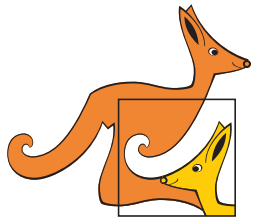


KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES



L'association *Kangourou Sans Frontières* organise le jeu-concours *Kangourou* pour plus de six millions de participants dans le monde.

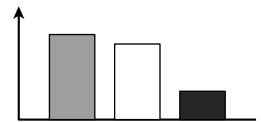
Jeu-concours 2015 — Durée : 50 minutes

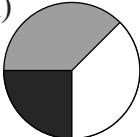
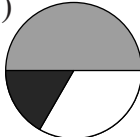
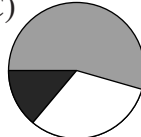

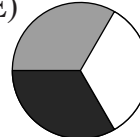
Sujet S

- L'épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites.**
 - **Il y a une seule bonne réponse par question.** Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.
 - Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes depuis la première question jusqu'à la première réponse erronée).
- Les classements sont séparés pour les Première S, les Terminale S et pour les étudiants (Bac+).**

- 1 Trois nombres ont pour moyenne 2015. Deux sont 2000 et 15. Quel est le troisième ?
A) 0 B) 2015 C) 2030 D) 4015 E) 4030

- 2 Diane a dressé un histogramme à partir des effectifs de trois espèces d'arbres recensées dans une forêt. Elle décide alors de faire un diagramme circulaire (où les secteurs angulaires sont proportionnels aux nombres d'arbres de chaque espèce). Lequel des diagrammes circulaires suivants correspond à son histogramme ?

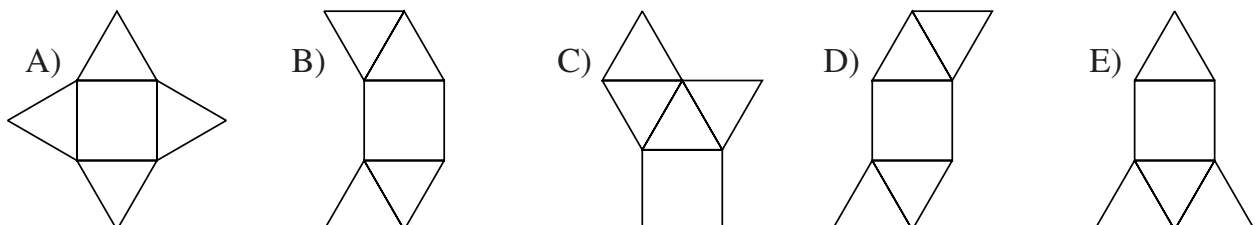


- A)  B)  C)  D)  E) 

- 3 Andréa est née en 1997 et sa sœur Charlotte en 2001. Parmi les affirmations suivantes concernant la différence d'âges des deux sœurs, quelle est celle qui est toujours vraie ?
A) elle est de moins de 4 ans B) elle est d'au moins 4 ans
C) elle est de 4 ans exactement D) elle est de plus de quatre ans
E) elle est de plus de trois ans

- 4 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les courbes représentatives des fonctions $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$. En combien de régions ces deux courbes partagent-elles le plan ?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

- 5 Lequel des cinq patrons proposés n'est pas celui d'une pyramide ?

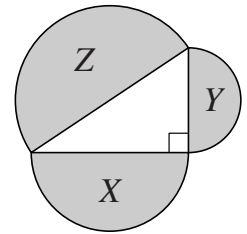


6 Combien vaut $\frac{2015^2 - 2005^2}{201 \times 200}$?

- A) 1 B) 2 C) 201 D) 210 E) 211

7 La figure montre en gris trois demi-disques dont les diamètres sont respectivement les trois côtés d'un triangle rectangle. Si X , Y et Z désignent les aires, en cm^2 , de ces trois demi-disques, laquelle des relations suivantes est nécessairement vraie ?

- A) $X + Y < Z$ B) $X + Y = Z$ C) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$
 D) $X^2 + Y^2 = Z^2$ E) $X^2 + Y^2 = Z$



8 On additionne les 31 entiers de 2001 à 2031. On divise le résultat par 31. Qu'obtient-on ?

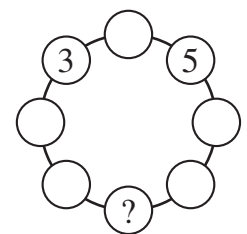
- A) 2012 B) 2013 C) 2015 D) 2016 E) 2496

9 Quel est le nombre de solutions de l'équation $2^{2x} = 4^{x+1}$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) une infinité

10 On souhaite écrire un nombre dans chacun des huit disques de la figure de telle sorte que tout nombre soit la somme de ses deux voisins. Deux nombres sont déjà écrits. Quel nombre doit figurer dans le disque marqué d'un point d'interrogation ?

- A) -3 B) -5 C) -8
 D) -16 E) aucun car c'est impossible



11 Cinq entiers différents et strictement positifs a, b, c, d et e vérifient : $\frac{c}{e} = b$; $a + b = d$ et $e - d = a$.

Quel est le plus grand de ces entiers ?

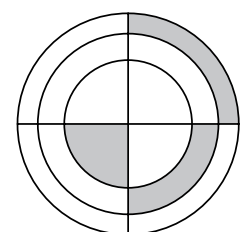
- A) a B) b C) c D) d E) e

12 Fabien a un dé équilibré standard : ses six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Jana a aussi un dé équilibré mais ses six faces sont numérotées 2, 2, 2, 5, 5 et 5. Fabien et Jana lancent simultanément leurs dés ; Jana gagne si le nombre sur son dé est strictement supérieur à celui de Fabien. Quelle est la probabilité que Jana gagne ?

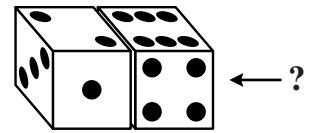
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{7}{18}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{11}{18}$

13 La figure montre trois cercles concentriques et deux diamètres perpendiculaires. Le plus petit cercle a pour rayon 1. Si les trois aires en gris sont égales, quel est le produit des trois rayons de ces cercles ?

- A) $\sqrt{6}$ B) 3 C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) 6



- 14** La figure présente deux dés identiques standard (la somme des nombres sur deux faces opposées d'un dé est 7).
 Quel nombre peut se trouver sur la face de droite (la face non visible désignée par la flèche) ?



- A) 5 seulement B) 2 seulement C) soit 2, soit 5
 D) soit 2, soit 3, soit 5 E) 1, 2, 3 ou 5

- 15** Lorsqu'on lit successivement les cinq affirmations suivantes en allant de la gauche vers la droite, laquelle est la première qui est vraie ?

- A) « C est vraie » B) « A est vraie » C) « E est fausse » D) « B est fausse » E) « $1 + 1 = 2$ »

- 16** On a 2015 billes numérotées de 1 à 2015. Toutes les billes dont la somme des chiffres est la même sont de la même couleur. Et si les sommes des chiffres de deux billes sont différentes alors les billes ne sont pas de la même couleur. Parmi ces 2015 billes, combien de couleurs différentes y a-t-il ?

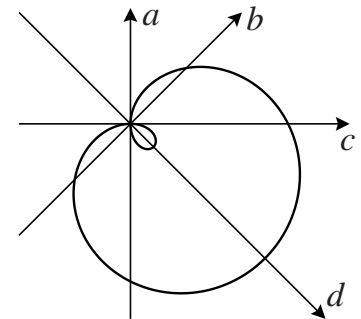
- A) 10 B) 27 C) 28 D) 44 E) 45

- 17** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentant l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient :

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Parmi les axes a , b , c et d , lequel est l'axe des ordonnées ?

- A) a B) b C) c
 D) d E) aucun des quatre



- 18** Un marchand d'art revend une sculpture 40% plus cher qu'il l'a achetée et un tableau 60% plus cher qu'il l'a acheté. Le montant global de ces deux ventes est de 54% supérieur à la somme de leur prix d'achat.

Quel est le rapport $\frac{\text{prix de la sculpture}}{\text{prix du tableau}}$ des prix d'achat par le marchand d'art ?

- A) $\frac{10}{13}$ B) $\frac{20}{27}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{2}{3}$

- 19** Laquelle des réponses proposées est un contre-exemple à l'affirmation « si n est un nombre premier alors un et un seul des entiers $n-2$ et $n+2$ est premier » ?

- A) $n = 11$ B) $n = 19$ C) $n = 21$ D) $n = 29$ E) $n = 37$

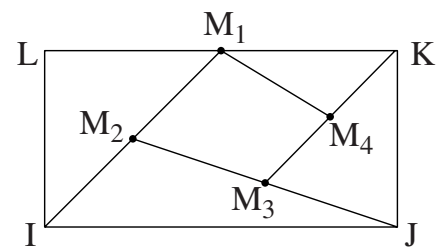
- 20** Le produit de l'âge d'un père et de celui de son fils est 2015. Quelle est la différence entre l'âge du père et l'âge du fils ?

- A) 26 B) 29 C) 31 D) 34 E) 36

- 21** Soit f une fonction définie sur les réels strictement positifs et vérifiant $f(x) + 2f\left(\frac{2015}{x}\right) = 4x$.
Quelle est la valeur de $f(5)$?
- A) 860 B) 1005 C) 1068 D) 2010 E) 2016

- 22** Dix nombres réels, deux à deux différents, sont écrits sur un tableau. Chaque nombre qui est le produit des neuf autres nombres est souligné. Quel est le nombre maximum possible de nombres soulignés ?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 9 E) 10

- 23** IJKL est un rectangle. M_1 est le milieu de [KL], M_2 est le milieu de [IM₁], M_3 est le milieu de [JM₂] et M_4 est le milieu de [KM₃] (voir figure ci-contre).
Quel est le rapport entre l'aire du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ et celle du rectangle IJKL ?
- A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{7}{32}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{9}{32}$



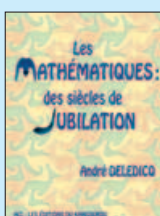
- 24** Dans une famille de rectangles, exactement 7 sont des carrés. Ces rectangles sont coloriés soit en rouge, soit en bleu. Il y a alors trois rectangles rouges de plus que de carrés bleus et il y a deux carrés rouges de plus que de rectangles bleus. Combien y a-t-il de rectangles bleus ?
- A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 10

Pour départager d'éventuels premiers ex aequo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

- 25** Parmi les n entiers consécutifs $1, 2, 3, \dots, n-1$ et n , on en écarte un et la moyenne des nombres restants est 8,8. Quel nombre a été écarté ?
- 26** Quel est le nombre de triangles non aplatis ABC, rectangles en B, tels que $AB = 20$ et dont tous les côtés sont mesurés par des entiers ?

© Art Culture Lecture - les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 4 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé.
« Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »

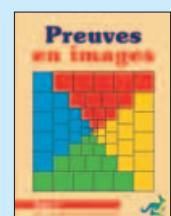


Kangourou des mathématiques, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet

<http://www.mathkang.org/catalogue/>

Des livres pour faire, comprendre et aimer les mathématiques



www.mathkang.org